УДК 004.045

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ АТТРАКТОРА ЛОРЕНЦА И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ

Ильичев В.Ю. (к.т.н.)

Калужский филиал ФГОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», г. Калуга, РФ;

patrol8@yandex.ru

Аннотация. Трёхмерное изображение решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), описывающих конвективный поток, представляет собой аттрактор Лоренца. Данная система уравнений является базовой детерминированной системой, с исследования которой началось развитие теории хаоса. Для получения характеристик этой сложной системы необходима разработка современного программного продукта, доступного и удобного в использовании.

Целью работы являлось создание программы для исследования аттрактора Лоренца на языке Python с использованием библиотек специальных команд. Особенное внимание уделено способам решения системы ОДУ разными численными методами и наглядности представляемых результатов.

Описаны блоки кода разработанной программы; с её помощью произведён расчёт аттрактора Лоренца при варьировании численных методов решения ОДУ и параметров системы. По результатам расчёта сделаны выводы.

Ключевые слова: теория хаоса; конвективное течение; аттрактор Лоренца; обыкновенное дифференциальное уравнение; язык Python; распределение данных.

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ЦЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Теория хаоса, начавшая развиваться примерно полвека назад, является одной из перспективных областей исследований, предлагая учёным объяснение явлений природы на новом, более глубоком, уровне понимания и даже создание моделей процессов, физическая природа которых пока не известна.

Кажущиеся на первый взгляд хаотичными процессы могут быть всё же смоделированы и объяснены. В данной области науки пока происходит накопление «критической массы» знаний, которое должно в результате привести к созданию стройной теории, способной помочь человечеству в описании и предсказании развития различных явлений.

Родоначальник теории хаоса, Эдвард Лоренц, был метеорологом, и предметом его исследований являлась одна из форм теплопередачи – конвективный теплообмен атмосферных потоков [5]. Автора статьи, в частности, интересует немного иная задача – описание конвективного теплообмена в теплообменных аппаратах, ведь понятно, что теория подобия, используемая до сих пор для данных моделей [4], являющаяся эмпирической, не отображает адекватно физической природы конвекции и поэтому не отвечает современным требованиям науки. Задача описания конвективного теплообмена, основанная на новых принципах, должна решаться поэтапно.

Так как за основу берётся модель Лоренца, то целью исследования является разработка удобного для использования программного продукта, позволяющего варьировать факторы рассматриваемой системы и наблюдать, как это повлияет на результаты расчёта параметров процесса конвекции. Программа должна быть простой в использовании, понятной и выводить наглядные результаты.

2. МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Модель, описывающая конвективное движение среды, состоит из трёх дифференциальных уравнений в частных производных:

1. уравнение движения ньютоновской жидкости (уравнение Навье-Стокса), показывающее, что ускорение жидкости зависит от её вязкости, плотности, давления, гравитационных сил. Свойством данного уравнения является то, что при достижении некоторого числа *Re* движение из ламинарного (упорядоченного) переходит в турбулентное (хаотичное);
2. уравнение теплопроводности, отображающее изменение пространственного распределения температуры в зависимости от времени;
3. уравнение неразрывности (сплошности), показывающее непрерывность потока среды.

Лоренц произвёл ряд преобразований данных уравнений, произведя разложение скорости и температуры в двойные ряды Фурье с отбрасыванием гармоник, выше второй [3]. Следует отметить, что это является достаточно грубым упрощением, позволяющим, однако, исследовать основы теории хаоса.

Полученное упрощение модели, описывающее поведение системы в трёхмерном пространстве параметров, представляется в виде системы однородных дифференциальных уравнений (в левой части которых приведены производные соответствующих параметров по времени):

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y, \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

где x отвечает за интенсивность процесса конвекции, y характеризует разность между температурами входящих и нисходящих потоков в кольцевом турбулентном завихрении, z показывает отклонение вертикального распределения температур от линейной зависимости; σ, ρ и β — некие параметры системы, характеризуемые положительными числами.

Если подробнее рассматривать параметры системы, то коэффициент σ связан с критерием Прандтля, ρ - связан с критерием Рэлея, коэффициент β отражает геометрию турбулентного вихря. Обычно демонстрацию решения системы Лоренца проводят при $\sigma = 10$, $\rho = 28$ и $\beta = 8/3$ (классические значения параметров).

Приведённая система уравнений показывает поведение среды в горизонтальном зазоре и подогреваемой снизу. Лоренц таким образом моделировал поведение атмосферных потоков нагретого землёй воздуха. Как будет показано дальше, данное поведение может резко меняться даже при небольшом изменении коэффициентов σ, ρ и β. Их упорядоченного движения система может резко переходить в хаотичное, но ограниченное определённой областью. Траектория движения в системе координат (x, y, *z*) называется «аттрактором Лоренца», имеющего так называемые точки притяжения, около которых самоорганизуется траектория решения системы уравнений на больших отрезках времени.

После исследования Лоренцом рассмотренного процесса, учёными предлагались и другие виды аттракторов [6]. Однако, аттрактор Лоренца остаётся первоосновой теории хаоса, и до конца не изучен. Созданная программа позволяет исследовать наиболее характерные особенности аттрактора Лоренца, и может к тому же служить примером использования многих команд выбранного языка программирования Python для реализации сложных численных методов.

Алгоритм программы состоит из следующих блоков:

1. Импорт необходимых команд из библиотек языка Python [1]: Tkinter - для создания пользовательского интерфейса программы, PIL – для размещения изображения с уравнениями в поле интерфейса, Os – для обработки системных событий, Numpy – для генерации массивов данных и их обработки, Scipy – для решения системы уравнений, Pylab и Mpl_toolkits – для создания двух- и трёхмерной графики, Seaborn – для создания гистограмм и графиков распределений.
2. Создание интерфейса пользователя с изображением решаемой системы ОДУ, надписей, полей ввода данных, всплывающего списка, кнопок запуска расчётов.
3. Написание 4 функций для реализации методов расчёта: создания системы ОДУ; решения системы ОДУ и построения трёхмерного изображения аттрактора Лоренца при нажатии кнопки «3D-аттрактор»; построения графиков изменения параметров (x, y, z) при нажатии кнопки «Перемещения по осям»; построения графиков распределений параметров (x, y, z) при нажатии кнопки «Вид распределений».

Функция solve_ivp библиотеки scipy.integrate, используемая в трёх последних функциях, позволяет интегрировать систему однородных дифференциальных уравнений с заданным начальным значением искомых функций:

$$dk/dt = f(t, k),\ k\,(t0) = k0.$$

Здесь t – время (независимая переменная), массив функций $f(t,\ k)$ определяет правые части однородных дифференциальных уравнений.

В поля интерфейса пользователя (рис. 1) можно вводить различные значения коэффициентов системы ОДУ: σ, ρ и β и начальных значений параметров (x, y, z): $x0$, $y0$, $z0$. Также можно менять конечное значение интервала интегрирования (времени) $t1$.

Задано деление каждого шага $t=1$ указанного интервала интегрирования [$0;\ t1$] для повышения точности построения графиков. Для решения системы могут быть использованы различные численные методы [2], реализуемые функцией solve_ivp, выбираемые с помощью всплывающего списка:

- «RK45»: явный метод Рунге-Кутта порядка 5(4). Управление ошибкой осуществляется в предположении точности метода четвертого порядка, но шаги выполняются по точной формуле пятого порядка. Аналогично, можно выбрать явный метод «RK23» - Рунге-Кутта порядка 2(3) или «DOP853» – порядка 8.
- «Radau»: неявный метод Рунге-Кутта семейства Radau IIA порядка 5.
- «BDF»: неявный многоступенчатый метод переменного порядка (от 1 до 5), основанный на формуле обратного дифференцирования для аппроксимации производной.

- «LSODA»: метод Adams/BDF с автоматическим обнаружением жесткости. Это оболочка решателя Fortran от ODEPACK.

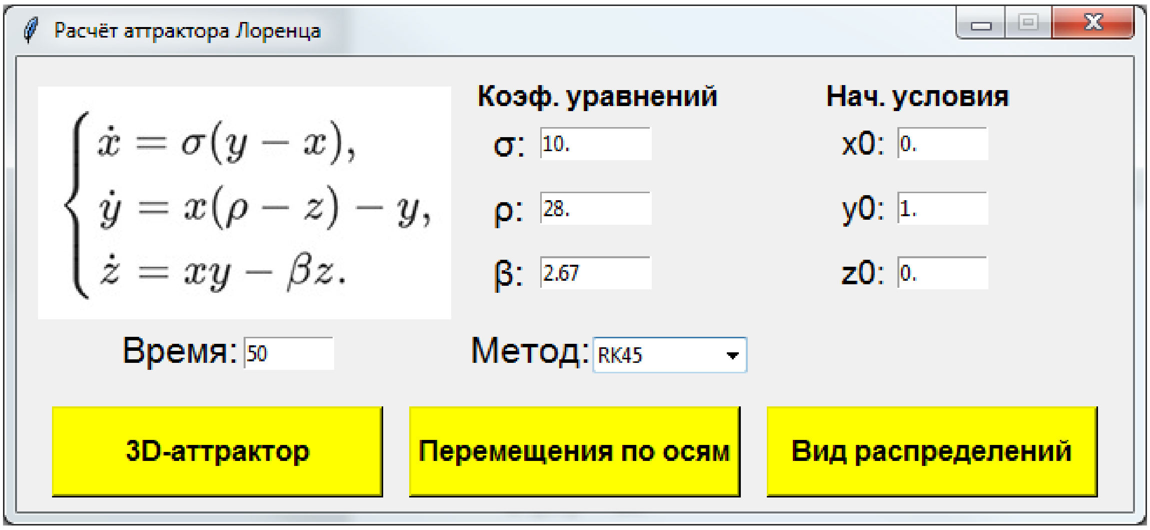

Рис. 1. *Пользовательский интерфейс программы для расчёта и построения характеристик аттрактора Лоренца.*

При разработке пользовательского интерфейса для построения характеристик аттрактора Лоренца предусмотрена возможность изменения всех вышеуказанных характеристик системы.

Решения, найденные с помощью функции solve_ivp, сохраняются в массив, по которому строятся графики.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

С помощью программы (размещённой на сайте автора [7]) произведён расчёт функций программы с параметрами уравнений, заданными по умолчанию; причём опробовано решение системы ОДУ всеми описанными методами. Они дают примерно одинаковые результаты, за исключением метода RK23, который из-за низкой точности демонстрирует затухающий процесс. Поэтому, в дальнейшем рассматриваются расчёты при использовании метода DOP853.

Изображение полученного с помощью функции программы «3D-аттрактор» аттрактора Лоренца изображено на рис. 2.

На рисунке видно, что траектории параметров постоянно проходят вокруг двух точек, определяющих стационарный режим конвекции, при котором потоки рабочего тела совершают постоянное вращательное движение. В данном случае возникают также две гомоклинические петли – смены направления движения системы, превращающие изображение аттрактора в «бабочку».

Более подробно изменение параметров с течением времени можно рассмотреть, выполнив вторую функцию программы «Перемещения по осям» (рис. 3).

Отчётливо прослеживается стремление системы к установлению хаотичного движения, которое, однако, не выходит за некоторые пределы и характеризуется характерной структурой (по разным осям разной).

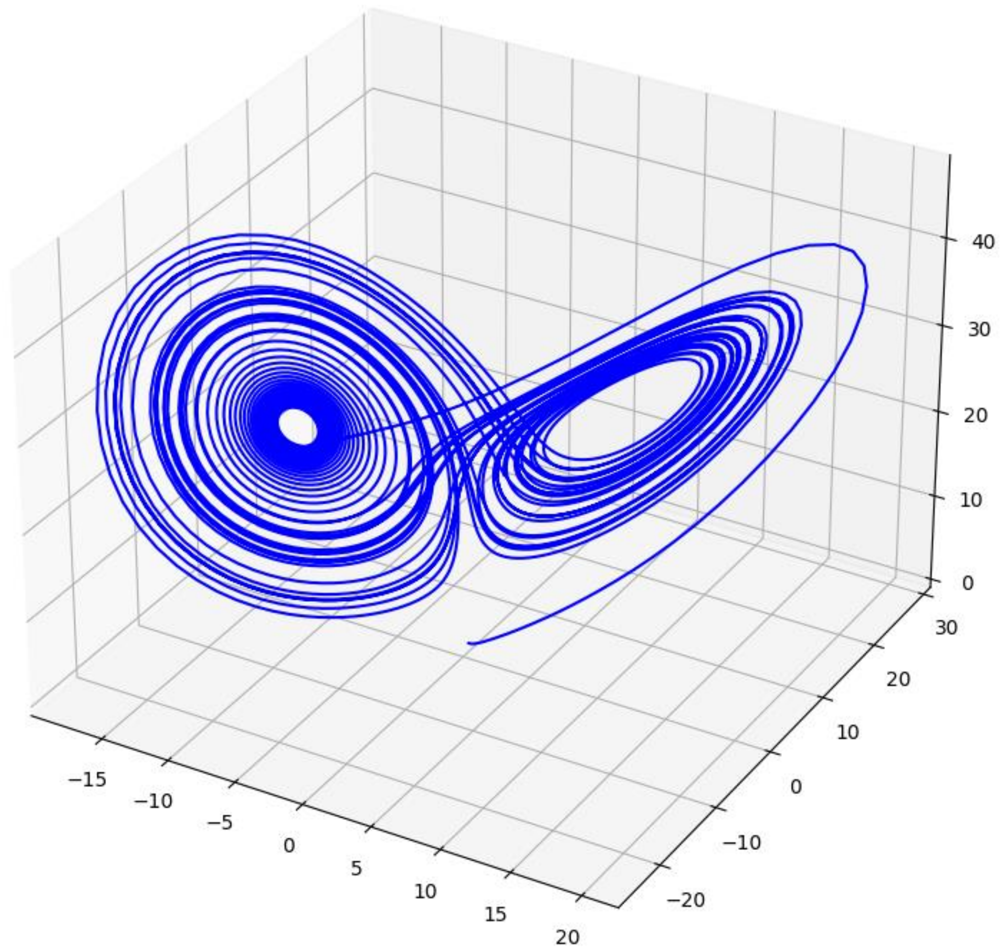

Рис. 2. *Аттрактор Лоренца, полученный при параметрах по умолчанию.*

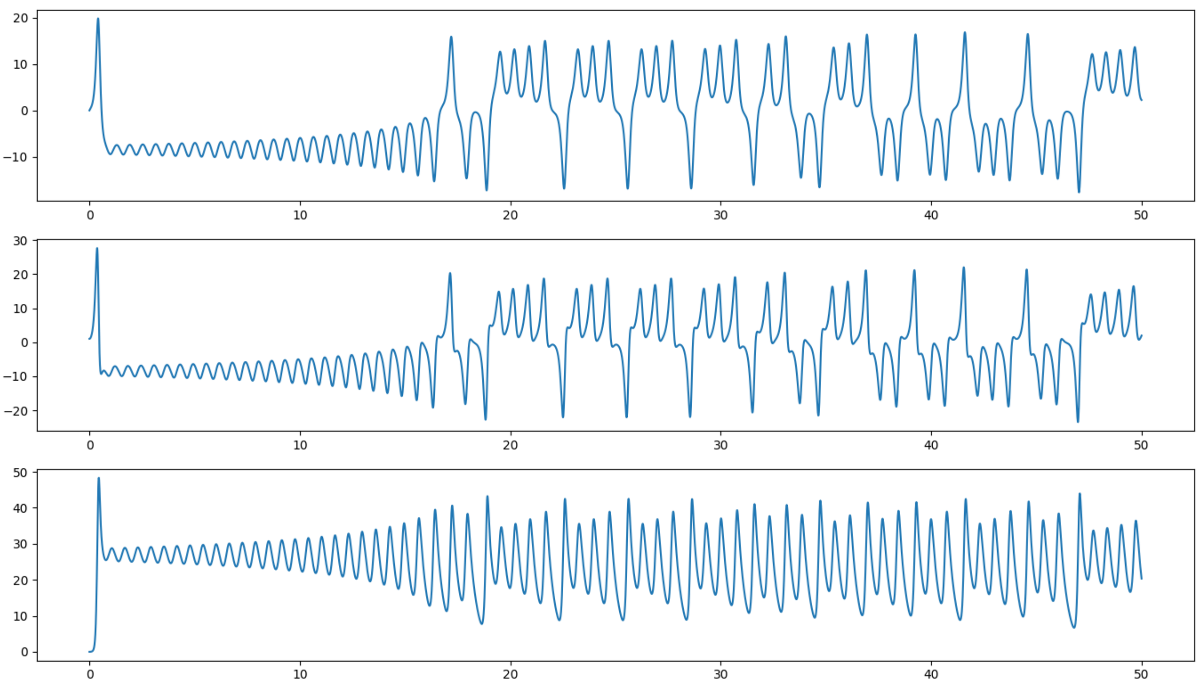

Рис. 3. *Изменения параметров системы с течением времени.*

Такое поведение системы делает интересным её исследование с точки зрения нахождения вероятностного закона распределения параметров, что можно осуществить с помощью функции «Вид распределений». При этом, если принять предел интегрирования равным t=50, как сделано выше, картина распределения оказывается нечёткой, т.к. сказывается начальный этап установления хаотичного движения в определённых пределах. Поэтому, при нахождении распределений предел интегрирования был увеличен до t=5000.

Результат, полученный при значениях параметров системы, оставленных по умолчанию (по дефолту), приведён на рис. 4.

Далее было произведено множество расчётов, показавшее, что виды распределений при возникновении вихрей в аттракторе Лоренца всегда имеют форму, подобную представленной на рис. 4.

При изменении настроек системы по умолчанию может наступить момент, когда вихревое, хаотичное, движение прекращается и наступает устойчивый режим, при котором на графиках распределений присутствует только один узкий столбик гистограммы, соответствующий установившемуся значению исследуемой характеристики. Причём, этот переход к устойчивому режиму происходит очень резко, при малейшем изменении параметров системы. Например, при σ=18,3515 (и остальных дефолтных параметрах) движение ещё вихревое, а при σ=18,3516 за короткий отрезок времени движение становится установившимся.

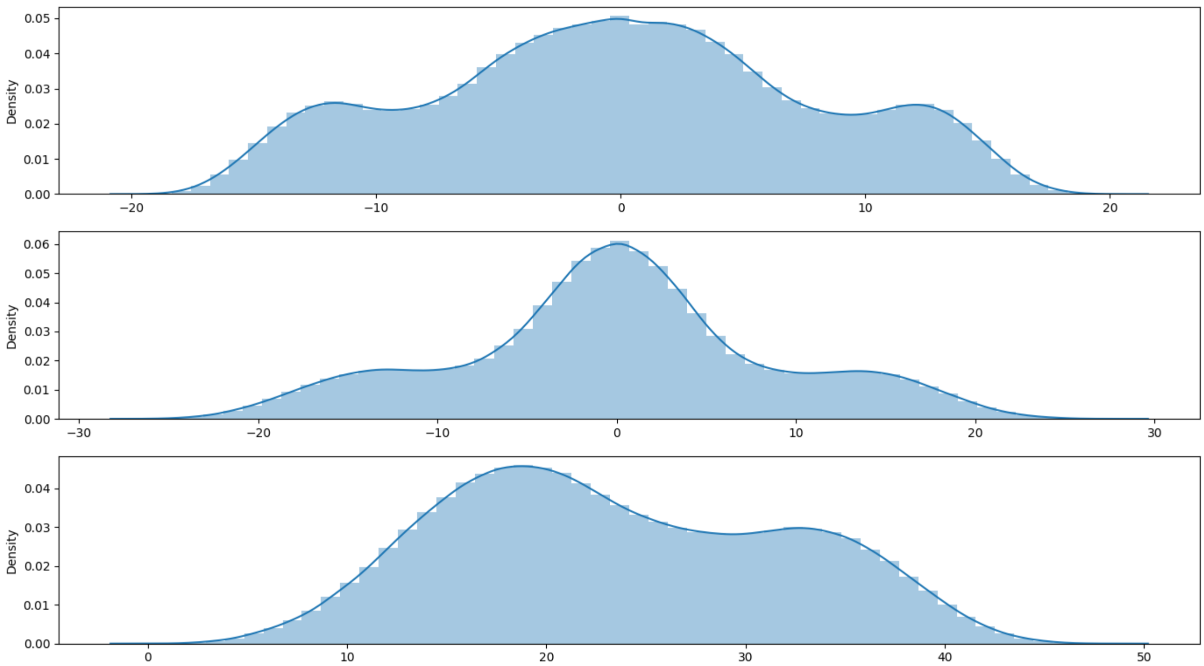

Рис. 4. *Распределения параметров, полученные при дефолтных настройках системы.*

Результаты получения трёх выводимых функций для этих случаев при t=5000 представлены на рис. 5. Вторая и третья функции, рассчитываемые программой, показаны только для параметра x.

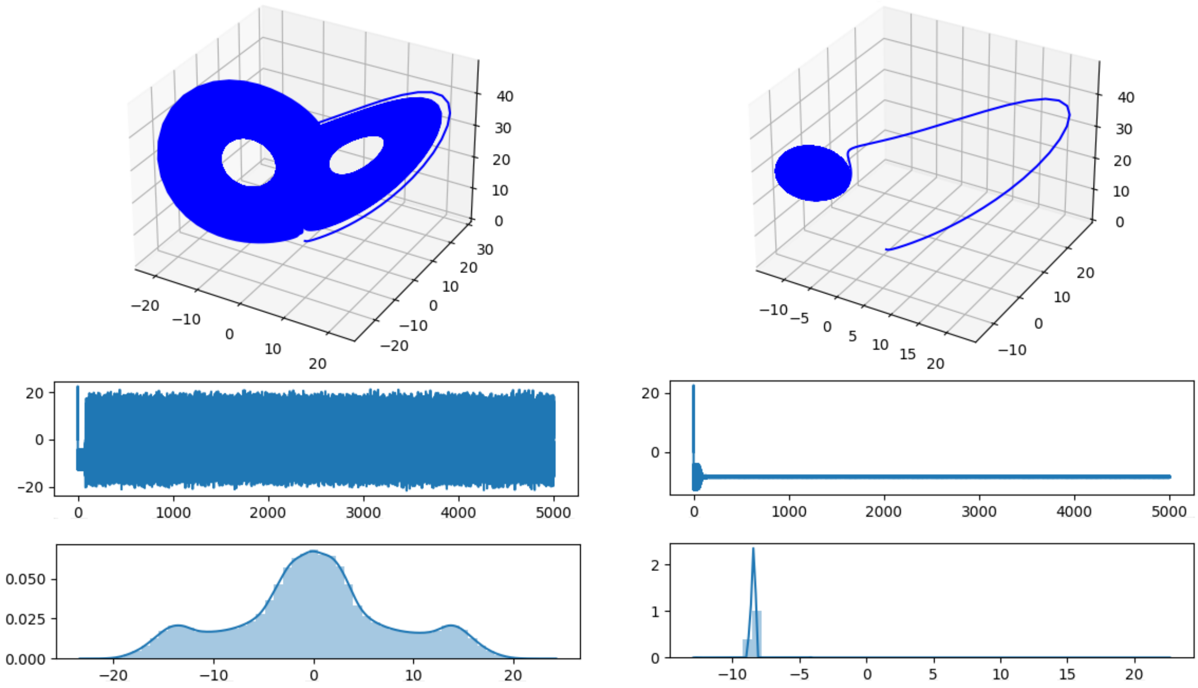

Рис. 5. *Изменение характеристик системы при переходе через определённое значение её параметра.*

4. ВЫВОДЫ

В ходе работы полностью выполнена поставленная цель: разработана программа, позволяющая численными методами с достаточной точностью определить основные характеристики аттрактора Лоренца при любых исходных параметрах. Имеется возможность выбора начальных параметров и коэффициентов системы, периода интегрирования (времени) и численного метода расчёта.

Рассмотрен пример, наглядно показывающий одну их особенностей рассматриваемого аттрактора – переход системы из устойчивого в хаотичное состояние и наоборот при определённых условиях.

Разработанный код программы, представленный на сайте, позволяет организовать расчёт и других нелинейных систем средствами языка Python, т.е. разработан современный метод исследования, пригодный для обучения основам исследования нелинейных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кизянов А.О., Лучанинов Д.В. Обзор компонентов (приложений, библиотек) языка приложения Python для создания конечного приложения // Постулат. – 2016. – № 8(10). – С. 9.

2. Мокроусова Т.А., Шаймухаметова Д.В. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений // Colloquium-journal. – 2017. – № 5(5). – С. 32-36.

3. Пчелинцев А.Н. Численное и физическое моделирование динамики системы Лоренца // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2014. – Т. 17. – № 2. – С. 191-201.

4. Сахин В.В., Герлиман Е.М., Голикова В.В. Критерии подобия в теплопередаче // Традиционная и инновационная наука: история, современное состояние, перспективы. Сборник статей Международной научно-практической конференции. – Уфа: ООО «Аэтерна», 2017. – С. 33-39.

5. Филиппов Ф.В., Струев А.М., Золкин А.Л. Моделирование аттрактора Лоренца // Программные продукты и системы. – 2020. – № 4. – С. 613-618.

6. Шильников Л.П. Бифуркации и странные аттракторы // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4-2. – С. 364-366.

7. Программа для вычисления характеристик аттрактора Лоренца. – URL: http:// http://turbopython.ru/lorenz (Дата обращения 29.01.2021).

DEVELOPMENT OF PROGRAM FOR RESEARCH OF LORENTZ ATTRACTOR AND IT'S USE

Ilyichev V.Yu. (Cand. Sci. (Technic))

Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, Russian Federation;

patrol8@yandex.ru

Abstract. The 3D image of the solution of a system of the ordinary differential equations (ODE) describing a convective stream is Lorentz attractor. The system was the basic deterministic system on the basis of which the development of chaos theory had begun. To obtain the characteristics of this complex system, it is necessary to develop a modern software product that is affordable and easy to use.

The purpose of the work described was to create a program for the study of the Lorentz attractor in the Python language using libraries of special commands. Particular attention is paid to the ways of solving the ODE system by various numerical methods and the visibility of the presented results.

Code blocks of the developed program are described; with its help, the Lorentz attractor was calculated while varying the numerical methods of solving the ODE and system parameters. Based on the results of the calculation, conclusions were made.

Keywords: chaos theory; convective flow; Lorentz attractor; ordinary differential equation; Python language; data distribution.

REFERENCES

1. Kizyanov A.O., Luchaninov D.V. Obzor komponentov (prilozhenij, bibliotek) yazyka prilozheniya Python dlya sozdaniya konechnogo prilozheniya [Overview of Python application language components (applications, libraries) to create a target application]. *Postulat*. 2016. No. 8(10). P. 9.

2. Mokrousova T.A., Shajmuhametova D.V. Chislennye metody resheniya obyknovennyh differencialnyh uravnenij [Numerical methods for solving ordinary differential equations]. *Colloquium-journal*. 2017. No. 5(5). P. 32-36.

3. Pchelincev A.N. Chislennoe i fizicheskoe modelirovanie dinamiki sistemy Lorenca [Numerical and physical simulation of Lorentz system dynamics]. *Sibirskij zhurnal vychislitelnoj matematiki*. 2014. No. 17-2. P. 191-201.

4. Sahin V.V., Gerliman E.M., Golikova V.V. Kriterii podobiya v teploperedache [Criteria of similarity in heat transfer]. Tradicionnaya i innovacionnaya nauka: istoriya, sovremennoe sostoyanie, perspektivy. Sbornik statei Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentzii. Ufa: LTD «Aeterna»2017. P. 33-39.

5. Filippov F.V., Struev A.M., Zolkin A.L. Modelirovanie attraktora Lorenca [Modeling of the Lorentz attractor]. *Programmnye produkty i sistemy*. 2020. No. 4. P. 613-618.

6. Shilnikov L.P. Bifurkacii i strannye attraktory [Bifurcations and strange attractors]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo*. 2011. No. 4-2. P. 364-366.

7. Programma dlya vychisleniya harakteristik attraktora Lorenca. 2021 [Program for calculating characteristics of the Lorentz attractor]. URL: http:// http://turbopython.ru/lorenz (accessed on 29.01.2021).